

# 均匀线阵的 ESPRIT 算法性能仿真分析

苏 龙,邓桂萍

(长沙航空职业技术学院,湖南长沙 410124)

**【摘要】**空间谱估计一直是阵列信号处理理论的一个重要分支,旋转不变子空间技术(ESPRIT)是空间谱估计中的典型技术。文章讨论了 ESPRIT 算法的原理,并通过仿真分析了不同入射角度、阵元数、阵元间距对算法结果的影响,同时也指出了 ESPRIT 算法在不同信噪比下的估计标准差,为进一步研究提供参考。

**【关键词】**空间谱估计;旋转不变子空间;ESPRIT 算法;仿真

**【doi:10.3969/j.issn.2095-7661.2019.01.008】**

**【中图分类号】**TP301.6

**【文献标识码】**A

**【文章编号】**2095-7661(2019)01-0027-04

## Performance simulation analysis of ESPRIT algorithm for uniform linear array

SU Long, DENG Gui-ping

(Changsha Aeronautical Vocational and Technical College, Changsha, Hunan, China 410124)

**Abstract:**Spatial spectrum estimation is always an important branch of array signal processing theory. The rotational invariant subspace technique (ESPRIT) is a typical technique in spatial spectral estimation. In this paper, the principle of ESPRIT algorithm is discussed, and the influence of different incident angle, different array number and different array spacing on the algorithm is analyzed by simulation. At the same time, the standard deviation of ESPRIT algorithm under different signal-to-noise ratio is pointed out, which provides a reference for further research.

**Keywords:**spatial spectrum estimation; rotational invariant subspace; ESPRIT algorithm; simulation

目前,空间谱估计理论正处于快速发展当中,也涌现了较多的研究成果,旋转不变子空间(ESPRIT)算法就是一种典型的算法。ESPRIT 算法由 Roy, Paulraj 和 Kailath 在文献<sup>[1-3]</sup>提出,其利用了接收数据协方差矩阵信号子空间的旋转不变特性来估计信号角度。相比 MUSIC 算法而言,ESPRIT 具有不需要进行谱峰搜索,且运算量比较小的特点,从而吸引了较多学者对其进行深入研究和分析<sup>[4-7]</sup>。本文重点介绍了 ESPRIT 算法的基本原理,并通过计算仿真实验分析了理论的估计性能和统计性能。

### 1 ESPRIT 算法

#### 1.1 阵元空间 ESPRIT 算法

假设存在一个由 M 个阵元组成的等距均匀线阵,如图 1 所示。现在将这个等距线阵分为两个子阵

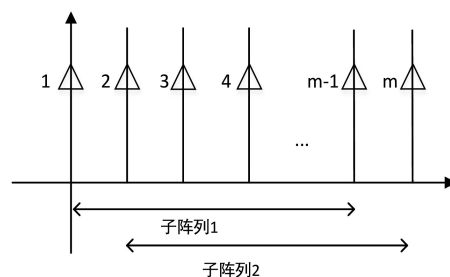


图 1 等距线阵分成两个子阵列示意图

列,其中子阵列 1 由第 1 个到 M-1 个阵元组成,子阵列 2 由第 2 个到第 M 个阵元组成。下面假设整个阵列的接收数据为 X, 第一个子阵列的接收数据为 X<sub>1</sub>, 第二个子阵列接收的数据为 X<sub>2</sub>, 根据阵列信号处理的模型可知:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N)] = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{W} \quad (1)$$

**【收稿日期】**2018-10-10

**【作者简介】**苏龙(1988-),男,长沙航空职业技术学院讲师,硕士研究生,研究方向:阵列信号处理、职业教育。

**【基金项目】**2017 年长沙航空职业技术学院课题“阵列信号处理方法研究”(课题编号:2017YB1702)。

式中  $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^T$  是  $m$  个阵元在  $n$  时刻的观测信号组成的观测数据向量, 而  $N$  是数据长度;  $\mathbf{S}$  是信号矩阵;  $\mathbf{A}$  是  $m \times p$  阵列方向矩阵,  $\mathbf{W}$  是噪声。

根据前面等距均匀线阵分成两个子阵列模型可知, 第一个子阵列的接收数据  $\mathbf{X}_1$  是由  $\mathbf{X}$  的前  $m-1$  行组成, 第二个子阵列的接收数据  $\mathbf{X}_2$  是由  $\mathbf{X}$  的后  $m-1$  行组成。

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \text{最后一行} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{第一行} \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

那么根据等距均匀线阵的阵列方向矩阵  $\mathbf{A}$  的结构可知, 子矩阵  $\mathbf{A}_1$  和  $\mathbf{A}_2$  之间存在关系式  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \Phi$ , 所以有

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{S} + \mathbf{W}_1 \quad (3)$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{S} + \mathbf{W}_2 = \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{S} + \mathbf{W}_2 \quad (4)$$

由于  $\Phi$  是酉矩阵, 所以  $\mathbf{X}_1$  和  $\mathbf{X}_2$  具有相同的信号子空间和噪声子空间。

接收数据的自协方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} &= \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} = [\mathbf{U}_s, \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \Sigma_s & 0 \\ 0 & \sigma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{U}_s \Sigma_s, \sigma^2 \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix} = \mathbf{U}_s \Sigma_s \mathbf{U}_s^H + \sigma^2 \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \end{aligned} \quad (5)$$

有  $\mathbf{I} - \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H = \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H$ , 所以上式可以写为

$$\mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H = \mathbf{U}_s \Sigma_s \mathbf{U}_s^H \quad (6)$$

上式两边同时右乘  $\mathbf{U}_s$ , 并且有  $\mathbf{U}_s^H \mathbf{U}_s = \mathbf{I}$ , 化简可以得到

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H \mathbf{U}_s (\Sigma_s - \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \quad (7)$$

令  $\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{A}^H \mathbf{U}_s (\Sigma_s - \sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$ , 所以上式可以简写为

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (8)$$

显然  $\mathbf{T}$  是一个未知矩阵, 并且是非奇异矩阵, 实际上  $\mathbf{T}$  不需要计算, 仅仅作为一个“虚拟参数”<sup>[8]</sup>。用  $\mathbf{T}$  右乘式(2), 那么有

$$\mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{T} \\ \text{最后一行} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{第一行} \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (9)$$

采用同样的分块形式, 将  $\mathbf{U}_s$  分块成

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \text{最后一行} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{第一行} \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

注意式(9)和式(10)形式完全相同, 且由前面的分析可知  $\mathbf{U}_s = \mathbf{A} \mathbf{T}$ , 故有

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{T} \quad \text{和} \quad \mathbf{U}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{T} \quad (11)$$

将  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \Phi$  代入上式中, 可得

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{T} \quad (12)$$

由  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{T}$  以及式(12), 又有

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{T}^{-1} \Phi \mathbf{T} = \mathbf{A}_1 \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \Phi \mathbf{T} = \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{T} = \mathbf{U}_2 \quad (13)$$

定义

$$\Psi = \mathbf{T}^{-1} \Phi \mathbf{T} \quad (14)$$

矩阵  $\Psi$  称为矩阵  $\Phi$  的相似变换, 它们具有相同的特征值。结合式(13)和式(14)则可以得到一个重要的关系式, 即

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 \Psi \quad (15)$$

上式反映了两个子阵的阵列接收数据的信号子空间的旋转不变性。ESPRIT 算法需要求解的是入射信号的方向, 实际上入射信号的方向信息隐含在矩阵  $\mathbf{A}$  和矩阵  $\Phi$  中, 由于矩阵  $\Phi$  是一个对角矩阵, 所以从  $\Phi$  入手求入射信号的方向会容易很多。假设矩阵  $\Phi$  的特征值为  $e^{i w_i}$ , 那么利用公式  $w_i = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_i$ , 便可以求出入射信号的方向  $\theta_i$ 。矩阵  $\Psi$  为矩阵  $\Phi$  的相似变换, 它们具有相同的特征值, 所以一旦得到了  $\Psi$ , 求得了  $\Psi$  的特征值, 就可以直接利用公式  $w_i = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_i$  得到入射信号的角度。

## 1.2 矩阵束的 ESPRIT 算法

根据前面 ESPRIT 算法的模型可知, 子阵列 1 和子阵列 2 的结构完全相同。子阵列 1 的数学模型表达式为  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{S} + \mathbf{W}_1$ , 子阵列 2 的数学模型表达式为  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{S} + \mathbf{W}_2 = \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{S} + \mathbf{W}_2$ , 那么它们的自协方差矩阵分别为

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{A}_1 \mathbf{P} \mathbf{A}_1^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (16)$$

$$\mathbf{R}_{22} = \mathbf{A}_2 \mathbf{P} \mathbf{A}_2^H + \sigma^2 \mathbf{I} = \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{P} \Phi^H \mathbf{A}_1^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (17)$$

子阵列 1 与子阵列 2 的互协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{A}_1 \mathbf{P} \Phi^H \mathbf{A}_1^H + \sigma^2 \mathbf{Z} \quad (18)$$

$$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{P} \mathbf{A}_1^H + \sigma^2 \mathbf{Z}^T \quad (19)$$

上式中的矩阵  $\mathbf{Z}$  是一个特殊矩阵, 为

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

即主对角线下面的对角线上的元素全部为 1, 而其余元素为 0。

对  $\mathbf{R}_{11}$  作特征值分解, 可以得到其最小特征值  $\lambda_{\min} = \sigma^2$ 。构造一对新的矩阵

$$\mathbf{C}_{11} = \mathbf{R}_{11} - \lambda_{\min} \mathbf{I} = \mathbf{R}_{11} - \sigma^2 \mathbf{I} = \mathbf{A}_1 \mathbf{P} \mathbf{A}_1^H \quad (21)$$

$$\mathbf{C}_{12} = \mathbf{R}_{12} - \lambda_{\min} \mathbf{Z} = \mathbf{R}_{12} - \sigma^2 \mathbf{Z} = \mathbf{A}_1 \mathbf{P} \Phi^H \mathbf{A}_1^H \quad (22)$$

把  $\{\mathbf{C}_{11}, \mathbf{C}_{12}\}$  称为矩阵束或者矩阵对。

矩阵束  $\{\mathbf{C}_{11}, \mathbf{C}_{12}\}$  广义特征值定义为

$$\mathbf{C}_{11} \mathbf{u} = \gamma \mathbf{C}_{12} \mathbf{u} \quad (23)$$

上式中的  $\gamma$  和  $\mathbf{u}$  为  $\{\mathbf{C}_{11}, \mathbf{C}_{12}\}$  的广义特征值和广义特征向量。通常将矩阵束写为  $\mathbf{C}_{11} - \gamma \mathbf{C}_{12}$ 。广义特征值  $\gamma$  会使  $\mathbf{C}_{11} - \gamma \mathbf{C}_{12}$  秩亏缺, 即如果  $\gamma$  为矩阵束的广义特征值, 那么矩阵束不是满秩。

矩阵束

$$C_{11} - \gamma C_{12} = A_1 P (I - \gamma \Phi^H) A_1^H \quad (24)$$

因为  $A$  列满秩及  $P$  非奇异, 所以有下式成立:

$$\text{rank}(C_{11} - \gamma C_{12}) = \text{rank}(I - \gamma \Phi^H) \quad (25)$$

当  $\gamma$  等于  $e^{jw_i}$  时, 由于  $\gamma e^{-jw_i} = 1$ , 所以对角矩阵  $(I - \gamma \Phi^H)$  的第  $i$  行全部为零, 因此其秩也就降低了 1。即  $\gamma = e^{jw_i}$  就是矩阵束  $C_{11} - \gamma C_{12}$  的广义特征值。得到了  $C_{11} - \gamma C_{12}$  的广义特征值, 那么利用  $w_i = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta_i$  就可以估计出入射信号的方向了。

### 1.3 Toeplitz 近似法

Toeplitz 近似法也称为 TAM 算法, 其具体原理可以查看参考文献<sup>[9]</sup>。下面介绍基本原理。

整个阵列的接收数据为  $X$ , 其数据自协方差矩阵为  $R_{xx}$ , 对  $R_{xx}$  进行奇异值分解可以得到

$$R_{xx} = [U_s, U_n] \begin{bmatrix} \Sigma_s & 0 \\ 0 & \Sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s^H \\ V_n^H \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中的  $\Sigma_s$  是信号子空间的奇异值组成的对角阵,  $\Sigma_n$  是噪声子空间的奇异值组成的对角阵。

如果要得到无噪声情况下的数据协方差矩阵, 可利用上式奇异值分解当中的奇异矢量来近似替代, 为

$$R_s = U_s \Sigma_s V_s^H \quad (27)$$

构造矩阵  $B$ , 并选择矩阵  $B$  的前  $m-1$  行为  $B_1$ , 矩阵  $B$  的后  $m-1$  行为  $B_2$

$$B = U_s \Sigma_s^{1/2} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{第一行} \\ \text{最后一行} \end{bmatrix} \quad (28)$$

根据子空间的旋转不变性, 矩阵  $B_1$  和矩阵  $B_2$  满足如下关系

$$B_1 D = B_2 \quad (29)$$

式中  $D$  为对角矩阵, 隐含入射信号的方向信息。

采用同样的分块形式, 将  $U_s$  分块成

$$U_s = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{第一行} \\ \text{最后一行} \end{bmatrix} \quad (30)$$

所以有

$$U_s \Sigma_s^{1/2} = \begin{bmatrix} U_1 \Sigma_s^{1/2} \\ U_2 \Sigma_s^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{第一行} \\ \text{最后一行} \end{bmatrix} \quad (31)$$

注意式 (28) 和式 (31) 形式完全相同, 且由前面的分析可知  $B_1 D = B_2$ , 故有

$$U_1 \Sigma_s^{1/2} D = U_2 \Sigma_s^{1/2} \quad (32)$$

可以求上式的最小二乘解为

$$D = (U_1 \Sigma_s^{1/2})^+ U_2 \Sigma_s^{1/2} \quad (33)$$

由此, 我们利用  $D$  的特征值就可得到信号的到达角。

## 2 仿真结果及分析

### 2.1 不同入射角度的仿真实验

仿真实验采用最大重叠子阵数, 8 阵元均匀线性阵, 阵元间距为载波波长的  $1/2$ , 快拍数为 1024, 信噪比为 0dB, 2 个独立窄带远场不相干信号, 在不同入

射角度下的仿真结果如表 1 所示。

表 1 不同入射角度的仿真结果表

	(30°32°)	(30°40°)	(30°45°)
阵元空间 ESPRIT	30.95°25.73°	30.23°40.10°	30.07°44.96°
矩阵束的 ESPRIT	30.97°19.00°	29.83°40.38°	29.79°45.25°
Toeplitz	30.65°34.80°	30.05°40.03°	29.81°44.66°

从表 1 可以看出, 当入射信号过于接近时, 三种算法都不能准确地估计出入射信号角度; 入射信号的间隔越大, ESPRIT 算法估计的结果越准确。

### 2.2 不同阵元数的仿真实验

仿真实验采用最大重叠子阵数, 阵元间距为载波波长的  $1/2$ , 快拍数为 1024, 信噪比为 0dB, 2 个独立窄带远场不相干信号, 入射角度为 30° 和 45°, 在不同阵元数的仿真结果如表 2 所示。

表 2 不同阵元数的仿真结果表

	4	8	16
阵元空间 ESPRIT	33.98°43.72°	29.80°45.10°	30.02°45.00°
矩阵束的 ESPRIT	32.84°48.15°	29.93°45.47°	29.95°44.92°
Toeplitz	28.21°45.17°	30.18°44.99°	30.00°45.04°

从表 2 可以看出, ESPRIT 算法的性能与阵元数有关。阵元数越少, 估计结果的准确度就越低; 阵元数越多, 估计的结果就越准确。当阵元数等于信源数时, ESPRIT 算法不能正确地描述信号的角度<sup>[10]</sup>。

### 2.3 不同阵元间距的仿真实验

仿真实验采用最大重叠子阵数, 8 阵元均匀线性阵, 快拍数为 1024, 信噪比为 0dB, 2 个独立窄带远场不相干信号, 入射角度为 30° 和 45°, 在不同阵元间距的仿真结果如表 3 所示。

表 3 不同阵元间距的仿真结果表

	0.4 波长	0.5 波长	0.6 波长
阵元空间 ESPRIT	23.47°34.51°	29.81°44.90°	36.90°58.10°
矩阵束的 ESPRIT	23.58°34.30°	30.11°45.51°	36.80°59.13°
Toeplitz	23.68°34.51°	30.06°45.08°	37.00°58.09°

从表 3 可以看出, 阵元间距对 ESPRIT 算法的估计性能也有影响。当阵元间距等于 0.5 波长时, 三种算法估计的角度都比较准确。当阵元间距大于或者小于 0.5 波长时, ESPRIT 算法估计的结果误差较大。

### 2.4 统计性能比较

仿真实验针对 8 阵元均匀线性阵, 1 个信号源且入射信号方向为 50°, 阵元间距为载波波长的  $1/2$ , 采用文中提到的两种算法和 MUSIC 算法。图 2 为仿真的三种算法的估计方差与信噪比关系, 图中独立实验次数为 100 次。

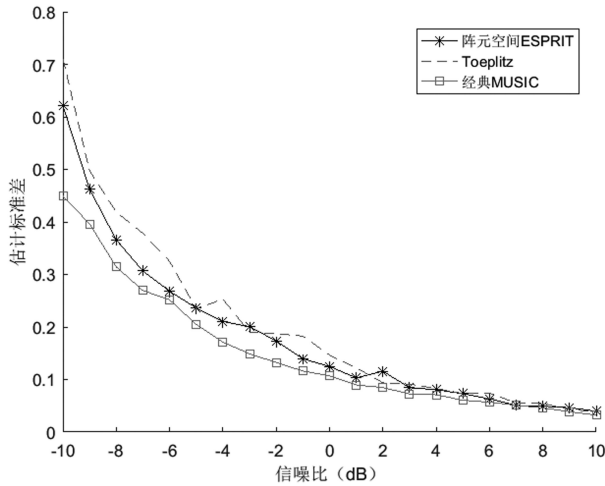


图 2 估计标准差与信噪比关系图

由于矩阵束的 ESPRIT 算法性能受噪声影响比较大,所以本文没有把矩阵束的 ESPRIT 算法放入图中。从图可以看出,ESPRIT 算法的估计标准差要大于 MUSIC 算法,ESPRIT 算法的性能差于 MUSIC 算法。特别当信噪比较低时,差距越明显;信噪比越高时,差距越小。

### 3 结束语

本文主要讨论了 ESPRIT 算法,重点阐述了算法的原理以及研究了不同入射角度、不同阵元数、不同阵元间距对算法结果的影响。总的来说,当阵元数越大、入射信号角度的间隔越大,入射信号源越少的时候,ESPRIT 算法估计的角度越准确。相比 MUSIC 算法,ESPRIT 算法的统计性能较差,但是 ESPRIT 算法的运算量小,便于实时运算,原因在于 ESPRIT 不需

要进行谱峰搜索。

### 【参考文献】

[1]Roy R, Kailath T. ESPRIT—a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise[J]. IEEE Trans. on ASSP, 1986(10):1340-1342.  
 [2]Paulraj A, Roy R, Kailath T. Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques—ESPRIT [J]. In proc. 19st Asilomar Conf. on Signals, Systems, and computers, Pacific Grove, CA, 1985, 83-89.  
 [3]Roy R, Paulraj A, Kalath T. Comparative performance of ESPRIT and MUSIC for direction-of-arrival estimation [J]. In proc. 20st Asilomar Conf. Circuits, Syst, Computation, Asilomar. CA, 1987(12):2344-2347.  
 [4]梁浩,崔琛,余剑.基于 ESPRIT 算法的十字型阵列 MIMO 雷达降维 DOA 估计[J].电子与信息学报,2016(1):80-89.  
 [5]文才,吴建新,王彤.波束 - 多普勒 ESPRIT 多目标 DOA 估计[J].电子与信息学报,2018(5):1136-1143.  
 [6]杨银松,郭英,于欣永.基于酉 ESPRIT 的跳频信号 DOA 估计[J].空军工程大学学报(自然科学版),2018(2):93-99.  
 [7]张晓明.空时无线多径簇信道的仿真分析[J].湖南邮电职业技术学院学报,2014(2):18-20.  
 [8]张贤达.现代信号处理(第三版)[M].北京:清华大学出版社,2015.  
 [9]王永良,陈辉,彭应宁.空间谱估计理论与算法[M].北京:清华大学出版社,2004.  
 [10]刘艳,杨力生,黄卫华.ESPRIT 算法估计性能分析[J].信息技术,2011(3):100-102.

(上接第 9 页)

过程中剥线长度要严格控制在 11-12mm 以内,放线的过程要严格遵守规范,减少线缆相互缠绕问题。

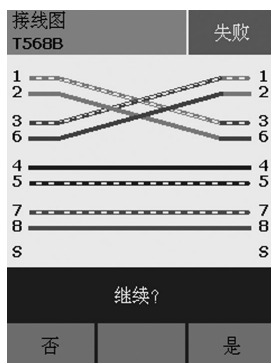


图 6 错对故障示意图

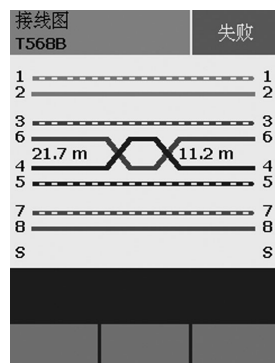


图 7 串绕故障示意图

### 3 结束语

在 GCS 系统的通道测试模型链路测试模型下对开路故障、短路故障、反接故障、错对故障、串绕故障等五种常见接线图故障现象进行分析,提出相应的解

决方案,为 GCS 系统工程建设和验收提供可实行的参考依据。在 GCS 系统接线图测试完成后,应使用综合管理软件导入被测测试数据,生成 GCS 系统测试报告,并通过对测试报告的分析,可以判定 GCS 系统工程的施工质量。

### 【参考文献】

[1]张振中.浅谈结构化综合布线系统测试[J].长沙通信职业技术学院学报,2011(10):10-14.  
 [2]宁辉华.计算机网络综合布线常见问题分析及解决[J].通讯世界,2017(22):35-36.  
 [3]陈东.智能建筑综合布线系统电气性能测试与研究[J].现代建筑电气,2013(6):1-3.  
 [4]宁辉华.计算机网络综合布线常见问题分析及解决[J].通讯世界,2017(22):35-36.  
 [5]姚祖发.综合布线工程中光纤测试基准设置与测试方法的改进[J].现代信息科技,2018(4):74-75.